Traseringen til 2-dimesnsjonale representasjoner av kvosienter av $k\langle x, y\rangle$

av

ASMAA QURESHI

THESIS
for the degree of

MASTER OF EDUCATIONAL SCIENCE

(Master i realfagsutdsnning)

Det matematisk- naturvitenskapelige fakultet
Universitetet i Oslo

Mai 2011

Faculty of Mathematics and Natural Sciences
University of Oslo

Sammendrag

I denne oppgaven skal vi studere traseringen til endelig-dimensjonale representasjoner av den ikke-kommutative $k-$algebraen $k\langle x,y\rangle$, generert av to elementer. Vi skal se på traser til elementer i ringen generert av to generiske matriser.

Fra før av vet vi at alle traser er invariante under konjugasjon. Å vise den motsatte veien er vanskelig. Artin og Procesi beviste det motsatte, altså at alle invariante er genereret traser. På 1970-tallet formodet Artin at traserngen var isomorf med inarvariantringen, og Procesi beviste dette.

I kapitlet om bakgrunnstoff presnteres de ulike ringene vi skal jobbe med; ringen av de genereiske matrisene, invariantringen og traseringen. Det blir pgså gitt en oversikt over hvordan gruppen GL_n virker ved konjugasjon og en del proposisjoner angående sum, produkt og sammensetning av gruppen som virker og elementene som gruppa virker på.

Etter dette kapitlet gis det en presentasjon av beviset til C. Procesi i detalj. I neste kapittel ser vi på 'Aritmetikken' for traseringen og viser sentrale egenskaper for traser ved hjelp av Cayley-Hamiltons teorem. I kapitlet etter det ser vi nærmere på traseringen og dets generatorer. Vi er kun interessert i de modulavbildingene som er surjektive, altså der $M=k^2$ er en simpel modul.
Helt tilslutt er det beregning av traseringen for utvalgte kvotsienter av $k\langle x,y\rangle$.
Dette gjøres for $k\langle x,y\rangle$ delt ut med fire ulike idealer.

Innhold

1 Bakgrunnsstoff **2**
1.1 Ringen av generiske matriser 2
1.2 Virkningen av G ved konjugasjon 2
1.3 Invaraiantringen 3
1.4 Traseringen 4

2 Beviset til Artin og Procesi **5**
2.1 Artins formodning 5
2.2 Procesis bevis 5
2.2.1 Notasjon 5
2.2.2 Beviset for at traseringen $\simeq$ invariantringen 6

3 Aritmetikk **10**
3.1 Aritmetikk for traseringen 10
3.2 Eksempler 11
3.2.1 Eksempel 1 11
3.2.2 Eksempel 2 12
3.2.3 Eksempel 3 12

4 Traseringen **13**
4.1 Traseringen for $2 \times 2-$matriser 13
4.2 Traseringen for $3 \times 3-$matriser 13
4.3 Traseringen for kvosienter 13

5 Beregne trasering **15**

Bibliografi **18**

Kapittel 1

Bakgrunnsstoff

1.1 Ringen av generiske matriser

La A vï¿½re en ikke-kommutativ ring $A = k\langle x_1, \ldots, x_m \rangle$, og la $\phi : A \to End_k(k^n) \simeq M_n(k)$ vï¿½re strukturavbildningen til modulen $M = k^n$. Da vil ϕ avbilde $x_i \mapsto \phi(x_i) = M_i$, som er en $n \times n$-matrise. Gruppen av invertible matriser SL_n virker pï¿½ $M_n(k)$ ved konjugasjon. La $P \in SL_n$, vi har

$$(M_1, \ldots, M_m) \longmapsto (P^{-1}M_1P, \ldots, P^{-1}M_mP)$$

La $\Gamma = k[x_{11}^1, \ldots, x_{nn}^m] = k[x_{ij}^l]$, $l = 1, \ldots, m$ og $i, j = 1, \ldots, n$ og la nï¿½ $\Phi : A \to M_n(\Gamma)$. Da vil $x_l \longmapsto (x_{ij}^l)$. Altsï¿½ blir et element fra ringen A, sendt til en matrise, der 'entriene' i matrisen ligger i Γ

Prop 1.1.1. $\Phi(A)$ *er en ring, ringen av de generiske matriser.*

Bevis. Siden A er en ring, mï¿½ $\Phi(A)$ ogsï¿½ vï¿½re en ring fordi Φ er en ring-homomorfi □

Vi fï¿½r m $n \times n$ generiske matriser, altsï¿½ $m \cdot n^2$ variable som kan fï¿½ verdier i k

Eks 1.1.2. $n = 2$:

$$x_1 \mapsto \begin{pmatrix} x_{11}^1 & x_{12}^1 \\ x_{21}^1 & x_{22}^1 \end{pmatrix}, \qquad x_2 \mapsto \begin{pmatrix} x_{11}^2 & x_{12}^2 \\ x_{21}^2 & x_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

1.2 Virkningen av G ved konjugasjon

Gruppen SL_n virker ogsï¿½ pï¿½ de generiske matrisene ved konjugasjon. Dette kan skje pï¿½ to mï¿½ter. La

$$f = x_{ij}^l \ : \ M_n(k)^m \mapsto k$$

(betraktet som en 'vanlig' funksjon) og

$$F = \left(x_{ij}^l\right) \ : \ M_n(k)^m \mapsto M_n(k)$$

(betraktet som en 'matrise'funksjon)

Def 1.2.1. *La* $P \in SL_n$, $\underline{a} \in k^{mn^2}, \underline{a} = (a^1, a^2, \ldots, a^m)$, *der* a^l *er en* $n \times n$-*matrise.*

a) $P.f(\underline{a}) = f(P.\underline{a}) = f(P\underline{a}P^{-1})$ *vanlig konjugasjon*

b) $P.F(\underline{a}) = P.F(P^{-1}\underline{a}P)P^{-1}$ *dobbel konjugasjon*

Prop 1.2.2. *La* $P, R \in SL_n$, $\underline{a} \in k^{mn^2}, \underline{a} = (a^1, a^2, \ldots, a^m)$, *der* a^l *er en* $n \times n$-*matrise. Da har vi*

a) $P.(f+g)(\underline{a}) = P.f(\underline{a}) + P.g(\underline{a})$

b) $P.(f \cdot g)(\underline{a}) = P.f(\underline{a}) \cdot P.g(\underline{a})$

c) $(P \cdot R).f(\underline{a}) = P.(R.f)(\underline{a})$

Bevis. Ved ï¿½ bruke definisjonen fï¿½r vi

a) $P.(f+g)(\underline{a}) = (f+g)(P.\underline{a}) = (f+g)(P\underline{a}P^{-1}) = f(P\underline{a}P^{-1}) + g(P\underline{a}P^{-1}) = f(P.\underline{a}) + g(P.\underline{a}) = P.f(\underline{a}) + P.g(\underline{a})$

b) $P.(f \cdot g)(\underline{a}) = (f \cdot g)(P.\underline{a}) = f(P.\underline{a}) \cdot g(P.\underline{a}) = P.f(\underline{a}) \cdot P.g(\underline{a})$

c) $(P \cdot R).f(\underline{a}) = f((P \cdot R).\underline{a})$
$P.(R.f)(\underline{a}) = P.(f(R.\underline{a})) = f(P.(R.\underline{a}))$

□

1.3 Invaraiantringen

Vi er interessert i de f eller F som forblir uendret under konjugasjon med P, altsï¿½ de funsksjonene som er invariante under virkningen av SL_n.

Def 1.3.1. *Invariantringen*

$$k[x_{11}^1, \ldots, x_{nn}^m]^{SL_n} = \Gamma^{SL_n} = \{f \in \Gamma |\ P.f = f,\ \forall P \in SL_n\}$$

Lemma 1.3.2. *Invariantringen* Γ^{SL_n} *er en underring av* Γ *og bestï¿½r av alle de elementene i* Γ *som er invariante under virkningen (konjugasjon) av* SL_n-*gruppa.*

Bevis. La $f, g \in \Gamma^{SL_n}$ og $\gamma \in \Gamma^{SL_n}$. Da har vi

1) $\gamma.(f+g)(\underline{a}) = (f+g)(\gamma.\underline{a}) = f(\gamma.\underline{a}) + g(\gamma.\underline{a}) = \gamma.f(a) + \gamma.g(a) = (\gamma.f + \gamma.g)(a)$

2) $\gamma.(f \cdot g)(\underline{a}) = (f \cdot g)(\gamma.\underline{a}) = f(\gamma.\underline{a}) \cdot g(\gamma.\underline{a}) = (\gamma.f \cdot \gamma.g)(a)$

3) $\gamma.1(\underline{a}) = 1(\gamma.\underline{a}) = 1$

□

1.4 Traseringen

Def 1.4.1. *T = Mengden av alle traser (= traseringen). $T \subset \Gamma$ og er den minste underring av Γ som inneholder alle traser og er generert av koeffisientene til karakterisitiske polynomene til de generiske matrisene.*

Bemerkning 1.4.2. *I kap 2 tar vi for oss beviset til* `Artin og Procesi` *som viser at $T \simeq \Gamma^{SL_n}$. Pï¿½ grunn av isomorfien mï¿½ T ogsï¿½ vï¿½re en ring siden Γ^{SL_n} er en ring.*

Kapittel 2

Beviset til Artin og Procesi

Artin formodet og Procesi beviste at traseringen er isomorf med invariantringen. Fra fï¿½r av vet vi at alle elementer i traseringen er invariant under konjugasjon. Vanskeligheten er derfor ï¿½ vise den motsatte veien.

2.1 Artins formodning

Hvis vi har m $n \times n$ matriser $X_1, \ldots, X_m$ kan vi oppfatte disse som en avbildning fra Γ inn i k. Lar vi SL_n virke simultant pï¿½ disse matrisene, sï¿½ vil en invariant funksjonen vï¿½re et polynom i traseringen $T = Tr(X_1, \ldots, X_m)$. [?]

2.2 Procesis bevis

Basert pï¿½ beviset til Procesi i [?]

2.2.1 Notasjon

Notasjonen som blir brukt i beviset er som fï¿½lger:
K er en kropp med $Char(K) = 0$, $V \simeq K^n$ er en n-dimensjonalt vektorrom med basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ og

$$(K_n) \simeq End(V) \simeq M_n(K)$$

Vi lar $V^* = Hom_k(V, K)$, som er det duale rommet til V og $G = GL(n, K)$ gruppen av invertible matriser. Videre lar vi $W = (K)_n^i$ som er i-tuppel av matriser i $M_n(K)$.

G har en gruppevirkning pï¿½ W. Hvis $A \in G$, $B_j \in M_n(K)$ for $j = 1 \ldots i$, sï¿½ er

$$A.(B_1, \ldots B_i) = \left(AB_1A^{-1}, \ldots, AB_iA^{-1}\right)$$

G virker ogsï¿½ pï¿½ $K[W]$ ved at hvis vi har $A \in G, f \in K[W]$, s er

$$(A.f)(w) = f(A^{-1}.w)$$

$$T_{i,n} = K[W]^G = K[x_{ij}^l]^G = \{f \in K[x_{ij}] \mid A.f = f\}$$

Dette er mengden av polynomiale funksjoner pï¿½ W, som er er invariante under virkningen av G.

2.2.2 Beviset for at traseringen $\simeq$ invariantringen

Procesi starter beviset sitt med ï¿½ identfisere den i-te tensoren til (K_n) med $End(V^{\otimes i})$

$$(K_n)^{\otimes i} = \underbrace{M_n \otimes M_n \cdots \otimes M_n}_{iganger} \simeq End(V^{\otimes i})$$

La

$$f : V \otimes \ldots \otimes V \ \mapsto V \otimes \ldots \otimes V$$

vï¿½re en avbildning i $End(V^{\otimes i})$. Vi skal identifisere denne avbildningen med et element

$$B_1 \ \otimes B_2 \ \otimes \cdots \otimes B_i \in (K_n)^{\otimes i}$$

For et basiselement $e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_i}$ i $V \otimes \cdots \otimes V$ lar vi

$$f(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_i}) = \sum a_{(j_1 \ldots j_i, k_1 \ldots k_i)} \cdot e_{k_1} \otimes \cdots \otimes e_{k_i}$$

Denne avbildningen identifiserer vi med

$$a_{(j_1 \ldots j_i, k_1 \ldots k_i)} \cdot e_{j_1 k_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_i k_i} \in (K_n)^{\otimes i}$$

Dette gir oss en 1-1-korrespondanse.

Procesi ser vi videre pï¿½ gruppen G som er embedded i $End(V^{\otimes i})$ ved diagonal virkning. Altsï¿½ $G \subset End(V^{\otimes i}) \simeq \ M_n(K)^i$ hvor $A \in G \subset End(V^{\otimes i})$ virker ved

$$A.(v_1 \otimes \cdots \otimes \ v_i) = \ Av_1 \otimes \cdots \otimes \ Av_i$$

Videre ser Procesi pï¿½ sentralisatoren S til G i $End(V^{\otimes i})$

$$S = \{\varphi \in End(V^{\otimes i}) \mid g\varphi = \varphi g \, \forall g \in G\} \iff S = \{g\varphi g^{-1} = \varphi\}$$

Sentralisatoren S kan ogsï¿½ skrives som vektorrom utspent av λ_σ, dvs. $S = \langle \lambda_\sigma, \sigma \in S_i \rangle$, der S_i er symmetrigruppen. Dermed blir

$$\lambda_\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(i)}$$

Videre har vi en identifikasjon til. Vi lar

$$U = (V^*)^{\otimes i} \ \otimes \ V^{\otimes i}$$

Da har vi en pairing av $End(V^{\otimes i}) \times U \to K$ gitt ved:

$$\pi : U^* \to End(V^{\otimes i}) \tag{2.1}$$

Pairingen skjer pï¿½ fï¿½lgende mï¿½te:
La $\lambda \in End(V^{\otimes i}), \varphi_j \in V^*, x_j \in V$. Da har vi

$$\langle \lambda, \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_i \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_i \rangle = \langle \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_i, \lambda(x_1 \otimes \cdots \otimes x_i) \rangle \in K \tag{2.2}$$

Et element som er G-invariant i $U^* = ((V^*)^{\otimes i} \otimes V^{\otimes i})^*$ svarer til (gjennom π) et element som er G-invariant i $End(V^{\otimes i})$.

$$\mu_\sigma \overset{\pi}{\mapsto} \lambda_\sigma$$
$$End(V^{\otimes i})^G = S$$
$$V^{*\otimes i} \simeq (V^{\otimes i})^*$$

hvor vi har $U^* = Hom(U, k)$.

Teorem 2.2.1. *Enhver multilineï¿½r invariant* $\gamma : ((V^*)^{\otimes i} \otimes V^{\otimes i})^* \to K$ *er lineeï¿½rkombinasjon av invaiantene*

$$\mu_\sigma(\phi_1 \otimes \cdots \phi_i \otimes X_1 \cdots \otimes X_i) = \prod_j \left\langle \phi_{\sigma(j), X_j} \right\rangle$$

Bevis. $\gamma \overset{\pi}{\mapsto} \pi(\gamma)$, som er et element i sentralisatoren S. Det betyr at

$$\pi(\gamma) = \sum a_{i\sigma} \cdot \lambda_\sigma \implies \gamma = \sum a_\sigma \cdot \mu_\sigma$$

$$\begin{aligned} &\lambda_\sigma \langle \phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_i \otimes X_1 \otimes \cdots \otimes X_i \rangle \\ &= \langle \phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_i, \lambda_\sigma(X_1 \otimes \cdots \otimes X_i) \rangle \\ &= \left\langle \phi_1, X_{\sigma^{-1}(1)} \right\rangle \cdots \left\langle \phi_i, X_{\sigma^{-1}(i)} \right\rangle \\ &= \left\langle \phi_{\sigma(1)}, X_1 \right\rangle \cdots \left\langle \phi_{\sigma(i)}, X_i \right\rangle \\ &= \mu_\sigma(\phi_1 \otimes \cdots \phi_i \otimes X_1 \cdots \otimes X_i) \end{aligned}$$

□

V vektorrom, $G \in GL_n \hookrightarrow End(V)$. $g \in G$ virker pï¿½ V ved ï¿½ betrakte g som endomorfi av V. G virker pï¿½ $V^* = Hom(V, k) \ni \phi$ ved

$$(g\phi)(v) = \phi(g^{-1}v)$$

La $w^* \in V^*$. G virker pï¿½ $V^* \otimes V$ ved at

$$g(w^* \otimes v) = w^* g^{-1} \otimes gv$$

Nï¿½ skal vi identifisere $\psi \in End(V)$ med $\bar{\psi} : V^* \otimes V \mapsto k$ ved

$$\bar{\psi}(w^* \otimes v) = w^*(\psi(v))$$

Dersom ψ er G-lineï¿½r, dvs $\psi(gv) = (g\psi)(v)$, sï¿½ vil $\bar{\psi}$ vï¿½re G-invatiant, fordi:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(w^* g^{-1} \otimes gv) &= w^*(g^{-1}\psi(gv)) \\ &= w^*(g^{-1}g\psi v) \qquad \text{siden } \psi \text{ er } G\text{-lineï¿½r} \\ &= w^*(\psi v) \\ &= \bar{\psi}(w^* \otimes v) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Husk at
$$End(V) \simeq V^* \otimes V.$$
Vi er interessert i dekomposable endomorfier i $End(V)$, som er pï¿½ formen $\phi \otimes v$.
$$\phi \otimes v \mapsto \phi \cdot v$$
$$(\phi \otimes v)(u) = \langle \phi, u \rangle v = \phi(u) \cdot v \tag{2.4}$$

Multiplikasjon av endomorfier

a)
$$\phi \otimes u, \psi \otimes v \in End(V)$$
$$(\phi \otimes u) \cdot (\psi \otimes v) = \phi \otimes \langle \psi, v \rangle u$$

Traseavbildningen

b) $\phi \in V^*, v \in V$ Da er $tr(\phi \otimes v) = \langle \phi, v \rangle$
$$\begin{aligned}\sum_i (\phi \otimes v)_{ii} &= \sum_i (\phi(e_i) \cdot v_i \\ &= \sum_i \phi(v_i \cdot e_i) \\ &= \phi(\sum_i v_i \cdot e_i) = \phi(v) = \langle \phi, v \rangle\end{aligned}$$

Under fï¿½lger en kort oversikt over isomorfiene av G-rommene
$$\boxed{(K)_n^{\otimes i} \simeq M_n(K)^{\otimes i} \simeq (V^* \otimes V)^{\otimes i} \simeq V^{*\otimes i} \otimes V^{\otimes i}}$$

Beskrivelsen av de lineï¿½re invariante i $(V^* \otimes V)^{\otimes i}$ (fra teorem **??**) gir oss beskrivelsen av de lineï¿½re invariante for $M_n^{\otimes i}$. Vi kan nï¿½ uttrykke μ_σ i form av matrise-variable.

Teorem 2.2.2. *La* $\mu_\sigma : M_n(K)^{\otimes i} \mapsto K, \sigma \in \mathcal{S}_i$, $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_k)(j_1, \ldots, j_n)(t_1, \ldots, t_l)$ *Gitt* $B_1, B_2, \ldots, B_i \in M_n$ *Da er*
$$\mu_\sigma(B_1, B_2, \ldots, B_i) = tr(B_{i_1}, \ldots, B_{i_k}) \cdot tr(B_{j_1}, \ldots, B_{j_n}) \cdot tr(B_{t_1}, \ldots, B_{t_l})$$

Bevis. Ser pï¿½ $B_1, B_2, \ldots, B_i$ som dekomposable, siden bï¿½de hï¿½yresiden og venstresiden bestï¿½r
av multilineï¿½re avbildninger. Da kan vi skrive $B_j = \phi_j \otimes x_j$. Dermed blir
$$\begin{aligned}\mu_\sigma(B_1 \otimes B_2 \cdots \otimes B_i) &= \mu_\sigma(\phi_1 \otimes \phi_2 \otimes \cdots \otimes \phi_i \otimes x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_i) \\ &= \prod_{h=1}^{i} \left\langle \phi_{\sigma(h),x_h} \right\rangle = \langle \phi_{i_2}, x_{i_1} \rangle \langle \phi_{i_3}, x_{i_2} \rangle \cdots \left\langle \phi_{i_k}, x_{i_{k-1}} \right\rangle \langle \phi_{i_1}, x_{i_k} \rangle \cdot \\ &\langle \phi_{j_2}, x_{j_1} \rangle \cdots \langle \phi_{j_1}, x_{j_n} \rangle \cdot \langle \phi_{t_2}, x_{t_1} \rangle \cdots \langle \phi_{t_1}, x_{t_l} \rangle\end{aligned}$$

La $H = \langle \phi_{i_2}, x_{i_1} \rangle \langle \phi_{i_3}, x_{i_2} \rangle \cdots \left\langle \phi_{i_k}, x_{i_{k-1}} \right\rangle \langle \phi_{i_1}, x_{i_k} \rangle$.

$$
\begin{aligned}
tr(B_{i_1}B_{i_2}\cdots B_{i_k}) &= tr(\phi_{i_1}\otimes x_{i_1}\cdot\phi_{i_2}\otimes x_{i_2}\cdots\phi_{i_k}\otimes x_{i_k}) \\
&= tr(\phi_{i_1}\left\langle\phi_{i_2}\otimes x_{i_1}\right\rangle\cdots\left\langle\phi_{i_k}\otimes x_{i_{k-1}}\right\rangle\otimes x_{i_k}) \\
&= \left\langle\phi_{i_2}\otimes x_{i_1}\right\rangle\cdots\left\langle\phi_{i_k}\otimes x_{i_{k-1}}\right\rangle tr(\phi_{i_1}\otimes x_{i_k}) \\
&= \left\langle\phi_{i_2}\otimes x_{i_1}\right\rangle\cdots\left\langle\phi_{i_k}\otimes x_{i_{k-1}}\right\rangle\left\langle\phi_{i_1}, x_{i_k}\right\rangle \\
&= H
\end{aligned}
$$

Resten av teoremet fï¿½lger av dette. □

Teorem 2.2.3.

Enhver polynomial invariant av i $n\times n$-matriser $B_1, B_2, \ldots, B_i$ er et polynom i invariantene $tr(B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_j})$

Bevis. Vi har allerede bevist teoremet for multilineï¿½re invaianter. Det generelle tilfellet fï¿½lger av det. □

Kapittel 3

Aritmetikk

3.1 Aritmetikk for traseringen

Lemma 3.1.1. *La X og Y være $2 \times 2-$matriser. Da gjelder*

$$det(X+Y) - det(X) - det(Y) = tr(X) \cdot tr(Y) - tr(XY)$$

Bevis. $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ og $Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
det \begin{pmatrix} x_{11}+y_{11} & x_{12}+y_{12} \\ x_{21}+y_{21} & x_{22}+y_{22} \end{pmatrix} - (x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}) - (y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}) \\
= (x_{11}+y_{11})(x_{22}+y_{22}) - (x_{12}+y_{12})(x_{12}+y_{21}) - x_{11}x_{22} + x_{12}x_{21} - y_{11}y_{22} + y_{12}y_{21} \\
= x_{11}x_{22} + x_{11}y_{22} + y_{11}x_{22} + y_{11}y_{22} - x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} - x_{12}y_{21} - y_{12}y_{21} \\
= y_{11}x_{22} + x_{11}y_{22} - x_{12}y_{21} - y_{12}x_{21}
\end{aligned}$$

$tr(X) \cdot tr(Y) - tr(XY)$:

$$\begin{aligned}
(x_{11}+x_{22}) \cdot (y_{11}+y_{22}) - tr \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \\
= x_{11}y_{11} + x_{11}y_{22} + x_{22}y_{11} + x_{22}y_{22} \cdot tr \begin{pmatrix} x_{11}y_{11} + x_{12}y_{21} & * \\ * & x_{21}y_{12} + x_{22}y_{22} \end{pmatrix} \\
= x_{11}y_{11} + x_{11}y_{22} + x_{22}y_{11} + x_{22}y_{22} - x_{11}y_{11} - x_{12}y_{21} - x_{21}y_{12} - x_{22}y_{22} \\
= x_{11}y_{22} + x_{22}y_{11} - x_{12}y_{21} - x_{21}y_{12}
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.1.2. *Hentet fra Lemma 3.2 i [?]:*
La R være en kommutativ k-algebra. For to $2 \times 2-$ matriser X og $Y \in M_2(R)$ har vi at følgende gjelder:

i. $X^2 = t_X X - d_X I$, *der t_X er trasen til X og d_X er determinanten til X*

ii. $X^3 = (t_X^2 - d_X)X - t_X d_X I$

iii. $YX = -XY + t_X Y + t_Y X + t_{XY} - t_X t_Y$

Bevis. i. Fra *Cayley-Hamiltons teorem* får vi at matrisen X innsatt i dets karakteristiske polynom er lik null:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}^2 - (x_{11}+x_{22}) \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} - (x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0)$$

ii. Starter med $X^2 = t_X X - d_X I$, og multipliserer med X på begge sider av likningen. Da får vi

$$\begin{aligned} X^3 &= t_X X \cdot X - d_X I \cdot X \\ &= t_X \cdot X^2 - d_X \cdot X \\ &= t_X(t_X X - d_X I) - d_X X \qquad \text{fra i)} \\ &= t_X^2 X - t_X d_X - d_X X \\ &= (t_X^2 - d_X)X - t_X d_X \end{aligned}$$

iii. Observer at

$$\begin{aligned} (X+Y)^2 &= X^2 + XY + YX + Y^2 \\ &= t_X X - d_X I + XY + YX + t_Y Y - d_Y Y \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} (X+Y)^2 &= t_{X+Y} \cdot (X+Y) - d_{X+Y} I \\ &= (t_X + t_Y)(X+Y) - d_{X+Y} I \\ &= (t_X + t_Y)(X+Y) - (d_x + d_y + t_x + t_Y t_{XY} \qquad \text{fra Lemma ??} \\ &= t_X X + t_X Y + t_Y X + t_Y Y - d_x - d_Y - t_X - t_Y + t_{XY} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Setter likningene (??)og (??) lik hverandre og får :

$$\begin{aligned} t_X X - d_X + XY + YX + t_Y Y - d_Y & \\ = t_X X + t_X Y + t_Y X + t_Y Y - d_X - d_Y - t_X t_Y + t_{XY} & \\ XY + YX = t_X Y + t_Y X + t_{XY} & \\ YX = -XY + t_X Y + t_Y X + t_{XY} & \end{aligned}$$

□

3.2 Eksempler

3.2.1 Eksempel 1

$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ *og* $Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad t_X = 2,\ d_X = 2,\ t_Y = 5,\ t_{XY} = 13,\ t_X t_Y = 10$

$$X^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} t_x X - d_x I &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \qquad V.S = H. \end{aligned}$$

3.2.2 Eksempel 2

$$X^3 = X \cdot X^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$(t_X^2 - d_X)X - t_X d_X I = (4-3) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \qquad V.S = H.S$$

3.2.3 Eksempel 3

$$YX = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$- XY + t_X Y + t_Y X + t_{XY}$$

$$= - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

V.S = H.S

Kapittel 4

Traseringen

Husk at trasreringen T er definert som den minste underringen av $\Gamma \simeq k[x_{ij}^l]$, der$l = 1, \ldots, m$ og $i, j = 1, \ldots, n$ som inneholder alle traser. T er generert av koeffisientene til karakteristiske polynomene til de genreiske matrisene. Artin og Procesi beviste at $T \simeq \Gamma^G$, der Γ^G er invariantringen. Forventet dimensjon for invariantringen kan regnes ut ved hjelp av følgende formel: $mn^2 - (n^2 - 1)$

4.1 Traseringen for $2 \times 2-$matriser

La X, Yvære $2 \times 2-$matriser. Mengden av alle traser er

$$k[t_X,\ t_Y,\ d_X,\ d_Y,\ d_{X^2},\ t_{XY},\ t_{YX},\ t_{X^3}, \ldots]$$

Fra Lemma **??** vet vi at X^2 og X^3 uttrykkes av traser pga Cayley-Hamiltons teorem,
$m = 2, \quad n = 2 \qquad mn^2 - (n^2 - 1) = (m - 1)n^2 + 1 = (2 - 1) \cdot 4 + 1 = 5$ Så traseringen for $2 \times 2-$matriser X og Y er generert av fem elementer, nemlig $k[t_X, t_Y, d_X, d_Y, t_{XY}]$, der t_{XY} kan byttes ut med d_{X+Y}

4.2 Traseringen for $3 \times 3-$matriser

La X, Y være $3 \times 3-$matriser. $m = 2, n = 3$ Den forventede dimensjonen til invariantringen til X og Y er $(m - 1)n^2 + 1 = (2 - 1) \cdot 9 + 1 = 10$. Det er ikke entydig gitt hvilket elementer som generer traseringen til X og Y, men i de enkleste tilfellene er den gitt ved

$$k[t_X, t_Y, d_X, d_Y, t_{XY}, t_{X^2}, t_{Y^2}, t_{X^2Y}, t_{Y^2X}, t_{XYXY}].$$

4.3 Traseringen for kvosienter

La modulen $M = k^2$, Xog Y er matriser i $\in M_2(k)$. Vi har en ring delt ut med et ideal
$A = k \langle X, Y \rangle / J \overset{\rho}{\hookrightarrow} End(k^2) \simeq End(M) \simeq M_2(k)$, der J er et ideal.

I dette tilfellet er det generelt vanskelig å beregne traseringen eksplisitt, men man kan si noe om den i konkrete tilfeller, blant annet ved å bruke at X og Y generer hele $M_2(K)$ når M er irredusibel, dvs når M er simpel $\Leftrightarrow$ ρ er surjektiv $\Leftrightarrow$ $det_{[x,y]} = \frac{-1}{4} \cdot \Big((2t_{XY} - t_X t_Y)^2 - (t_X^2 - 4d_X)(t_Y^2 - 4d_Y)\Big) \neq 0$. I hvert tilfelle, må man sette idealet lik null. Siden $\{1, X, Y, XY\}$ skal generere hele $M_2(k)$, må $\{1, X, Y, XY\}$ være lineært uavhengige. Ved å bruke Lemma **??**, kan man alltid skrive X og Y ved hjelp av traser og determinanter. Siden idealet er lik null, må koeffisientene foran $\{I, X, Y, XY\}$ være null. Hentet fra [**?**].
I neste kapittel ser vi nærmere på hvordan dette gjøres med konkrete eksempler.

Kapittel 5

Beregne trasering

La $A = k\langle X, Y\rangle / I$.
Nå skal vi beregne traseringen for utvalgte kvotsienter av $k\langle X, Y\rangle$

a. $I = X^2 + Y^2 - 1$

b. $I = Y^2 - X^3$

c. $I = Y^2 - X^3 - 1$

d. $I = Y^2 - X^3 - 1 - \gamma(XY - YX)$

a. For $A = k\langle X, Y\rangle / X^2 + Y^2 - 1$: ser vi på når $I = 0$. Det betyr at

$$X^2 + Y^2 - 1 = 0$$

Dette kan vi skrive om på denne måten ved å bruke Lemma **??**

$$= t_X X\ d_X I\ + t_Y Y\ - d_Y I$$

$$= t_X X\ + t_Y Y\ - (d_X\ +\ d_Y\ +\ 1) =\ 0$$

For at$\{1, X, Y, XY\}$ skal være lineært uavhengige (sidn vi kun er interessert i simple moduler), må konstantene foran $\{1, X, Y, XY\}$ være 0. derfor blir

$$\Rightarrow t_X\ =\ t_Y\ =\ 0$$

$$d_X\ +\ d_Y\ +\ 1 =\ 0 \Rightarrow d_X\ =\ -1 -\ d_Y$$

t_{XY} kan velges fritt

Det betyr at traseringen til A er generert av d_Y (ev. d_X) og $t_X Y$

Tilslutt må vi sjekke om $d_{[X,Y]} \neq 0$:

$$\begin{aligned} d_{[X,Y]} &= \frac{-1}{4}\Big((2t_{XY}\ -\ t_X t_Y)^2 - (t_X^2 - 4d_X)(t_Y^2 - 4d_Y)\Big) \\ &= \frac{-1}{4}\ \Big((2t_{XY})^2 -\ (4 - 4d_Y)(-4d_Y)\Big) \\ &= t_{XY}^2\ + 4d_Y\ + 4d_Y^2 \neq 0 \end{aligned}$$

b. For $A = k\langle X,Y\rangle/Y^2 - X^3$: ser vi på når $I = 0$. Det betyr at

$$Y^2 - X^3 = 0$$

$$= t_Y Y - d_Y I - \Big((t_X^2 - d_X)X - t_X d_X\Big)$$

$$= t_Y Y - (t_X^2 - d_X)X - (-t_X d_X + d_Y)I = 0$$

For at$\{1, X, Y, XY\}$ skal være lineært uavhengige (siden vi kun er interessert i simple moduler), må konstantene foran $\{1, X, Y, XY\}$ være 0. derfor blir

$$\Rightarrow t_Y = 0$$

$$d_X = t_X^2$$

$$d_Y = t_X d_X = t_X^3$$

t_{XY} og t_X kan velges fritt

Det betyr at traseringen til A er generert av t_X og $t_X Y$

Tilslutt må vi sjekke om $d_{[X,Y]} \neq 0$:

$$d_{[X,Y]} = \frac{-1}{4}\Big((2t_{XY} - t_X t_Y)^2 - (t_X^2 - 4d_X)(t_Y^2 - 4d_Y)\Big)$$

$$= \frac{-1}{4}\Big((2t_{XY})^2 - (t_X^2 - 4t_X^2)(-4t_X^3)\Big)$$

$$= \frac{-1}{4}\Big(4t_{XY}^2 - 12t_X^5\Big)$$

$$= -t_{XY}^2 + 3t_X^5 \neq 0$$

c. For $A = k\langle X,Y\rangle / Y^2 - X^3 - 1$: ser vi på når $I=0$. Det betyr at

$$Y^2 - X^3 - 1 = 0$$
$$= t_Y Y - d_Y I - \Big((t_X^2 - d_X)X - t_X d_X\Big)$$
$$= t_Y Y - (t_X^2 - d_X)X - (-t_X d_X + d_Y - 1)I = 0$$

For at$\{1, X, Y, XY\}$ skal være lineært uavhengige (sidn vi kun er interessert i simple moduler), må konstantene foran $\{1, X, Y, XY\}$ være 0. derfor blir

$$\Rightarrow t_Y = 0$$
$$d_X = t_X^2$$
$$d_Y = t_X d_X + 1 = t_X^3 + 1$$

t_{XY} og t_X kan velges fritt
Det betyr at traseringen til A er generert av t_X og $t_X Y$

Tilslutt må vi sjekke om $d_{[X,Y]} \neq 0$:

$$d_{[X,Y]} = \frac{-1}{4}\Big((2t_{XY} - t_X t_Y)^2 - (t_X^2 - 4d_X)(t_Y^2 - 4d_Y)\Big)$$
$$= \frac{-1}{4}\Big(4t_{XY}^2 - (t_X^2 - 4t_X^2)(-(t_X^3 + 1))\Big)$$
$$= \frac{-1}{4}\Big(4t_{XY}^2 - (3t_X^5 + 3t_X^2)\Big) \neq 0$$

d. For $A = k\langle X,Y\rangle / Y^2 - X^3 - 1 - \gamma(XY - YX)$: ser vi på når $I=0$. Det betyr at

$$Y^2 - X^3 - 1 - : \gamma(XY - YX) = 0$$

$$= t_Y Y - d_Y I - \Big((t_X^2 d_X)X - t_X d_X\Big) - 1 - \gamma(XY) + \gamma[-XY + t_X Y + t_Y X - t_X t_Y]$$

$$= t_Y + \gamma t_X)Y + (t_X^2 + d_X - \gamma t_Y)X - 2\gamma XY(-d_Y + t_X d_X + t_X t_Y - 1)I = 0$$

For at$\{1, X, Y, XY\}$ skal være lineært uavhengige (sidn vi kun er interessert i simple moduler), må konstantene foran $\{1, X, Y, XY\}$ være 0. derfor blir

$$\Rightarrow t_Y = -\gamma XY$$
$$2\gamma = 0$$

$\Rightarrow \gamma = 0$, og da får vi akkurat samme situsjon som i c)

Bibliografi

[1] *Artin,M*, On Azumaya Algebras and Finite Dimensional Representations of Rings. J. of Alg. 11, (1969) pp. 532-563

[2] *Jï¿½ndrup, S., Laudal, O. A., Sletsjï¿½e,A. B.*, Noncommutative plane curves, Institute Mitage-Leffler Report no. 20(2003/2004), math AG/0405350.

[3] *Le Bruyn, L.* Tracering of generic 2 by 2 matrices. Mem. Amer. Math Soc.66 (363), 1987

[4] *Procesi, C.*, The invariant theory of $n \times n$ matrices. Adv. in math. 19, (1976), pp. 306-381